Tutorato Analisi I - 09/01/24

Ricevimento in vista dell'esame scritto: Domande varie

Domanda 7 Si consideri la funzione $f(x) = \frac{\log(x^3+1)}{x^3+1}$. Allora

NO A) L'integrale di $f(x)$ su [-1,0] converge

~~B)~~ L'integrale di $f(x)$ su $[1, +\infty]$ converge

C) L'integrale di $f(x)$ su $[1, +\infty]$ diverge

D) L'integrale di $f(x)$ su [0, 1] ??

Soluzione

Per la A), vogliamo studiare l'andamento asintotico di $\frac{\log(x^3+1)}{x^3+1}$ per $x \to -1$ (perché in $x=0$ non ci sono problemi (la funzione è continua in $x=0$)).

$$\int_{-1}^{0} \frac{\log(x^3+1)}{x^3+1}\, dx = \int_{0}^{1} \frac{\log t}{t} \frac{dt}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}$$

$t = x^3+1 \rightsquigarrow x^3 = t-1$, $x = \sqrt[3]{t-1}$

$dt = 3x^2\, dx$

$$dx = \frac{dt}{3x^2} = \frac{dt}{3\cdot\sqrt[3]{(t-1)^2}}$$

Per $t \to 0$ si ha $\sqrt[3]{(t-1)^2} \to 1$, quindi asintoticamente $(t\to 0)$ il fattore $\sqrt[3]{(t-1)^2}$ "non conta". cioè $\frac{\log t}{t}\frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}} \sim \frac{\log t}{t}$

Consideriamo $\varepsilon > 0$ "piccolo" $(0<\varepsilon<1)$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\log t}{t}\, dt = \int_0^{\varepsilon} \underbrace{\frac{1}{t}}_{(\log t)'} \log t\, dt = \log|\log t|\Big|_0^{\varepsilon} =$$

$$= \log|\log\varepsilon| - \lim_{t\to 0^+} \overbrace{\log\underbrace{|\underbrace{\log t}_{\to -\infty}|}_{\to +\infty}}^{\to +\infty} = -\infty$$

Quindi, in un intorno di $t=0$ ($[0,\varepsilon)$) (cioè $x=-1$) la funzione NON è integrabile (ossia l'integrale non converge in $x \in [-1,0]$).

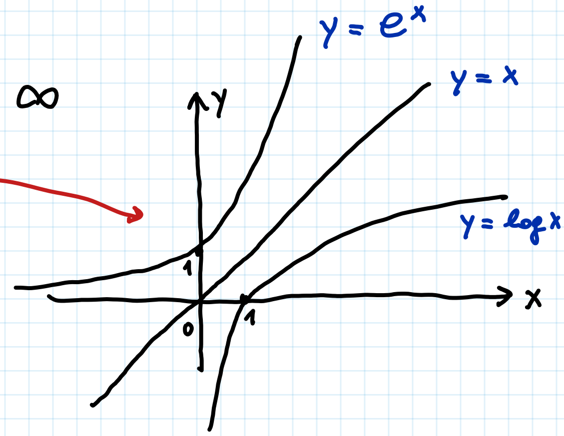
B e C) Dato che in $x = 1$ non ci sono problemi (e che la funzione $\dfrac{\log(x^3+1)}{x^3+1}$ è continua su $[1,+\infty)$) basta studiare il comportamento (asintotico) a $+\infty$

- $x^3+1 \sim x^3$
- $\log(x^3+1) \sim \log(x^3) = 3\log x$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cancel{3}\log x}{x^3}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$$

non conta

$\log x < x$



Recap (FONDAMENTALE)

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{conv.} \iff \alpha > 1$$

$M>0$

$\varepsilon>0$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{conv.} \iff \alpha < 1$$

Quindi la risposta corretta è la C.

<u>Domanda</u>: se troviamo arctan al posto di log?

<u>Risposta</u>: poiché $\arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$), abbiamo

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx < +\infty.$$

- Come trattare $\log t$ per $t \to 0^+$? $\quad u = 1/t, \quad t \to 0^+ \Rightarrow u \to +\infty$

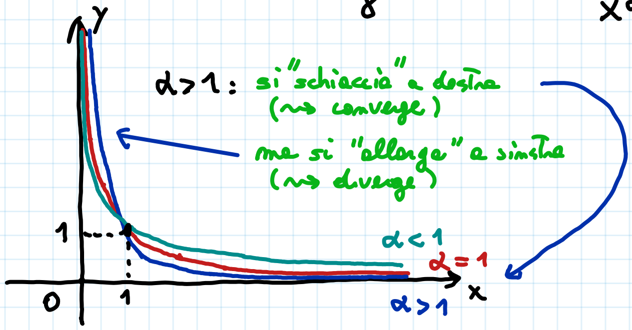
$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\log t}{t^\alpha}\,dt = \int_{+\infty}^{1/\varepsilon} \frac{\overbrace{\log\left(\frac{1}{u}\right)}^{-\log u}}{u^{-\alpha}}(-u^2)\,du = -\int_{1/\varepsilon}^{+\infty} u^{2+\alpha}\log u\,du$$

$u = \frac{1}{t}$, $du = -\frac{dt}{t^2} = -u^2\,dt$

scambio gli estremi d'integraz.

ora devo "trattare" il log a $+\infty$ (come prima)

Integrazione di $\frac{1}{x^\alpha}$



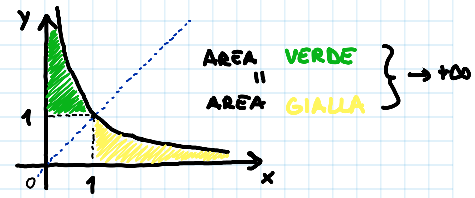
$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{CONVERGE} & \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE } (a +\infty) & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{DIVERGE } (a +\infty) & \alpha \geq 1 \\ \text{CONVERGE} & \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha = 1$ è il caso intermedio: non converge né "a 0", né "a $+\infty$"

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \quad , \quad \int_M^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \ .$$

In effetti, per simmetria:

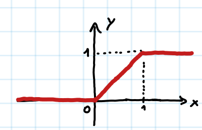


- Dare un esempio di una funzione CONTINUA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
  $\inf(f) = 0 \qquad \sup(f) = 1$.

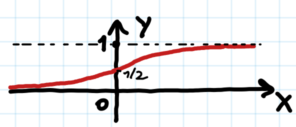
Proposta: $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = |\sin(x)|$ $\qquad$ FUNZIONA! Infatti:

- $f(x) \geq 0 \qquad f(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \inf(f) = \min(f) = 0$
- $f(x) \leq 1 \qquad f(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \sup(f) = \max(f) = 1$
- f è continua in quanto composizione di funzioni continue (su $\mathbb{R}$) $\qquad$ $\sin(x)$ è continua, $|x|$ è continua

Ce ne sono (infinite) altre, ad esempio $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ x & , \ 0 < x < 1 \\ 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$



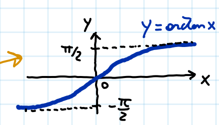
oppure $\quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$



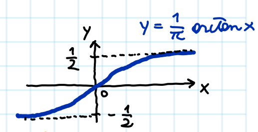
f è anche DERIVABILE (infinite volte)

come?

1. Considero il grafico di $\arctan x$



2. Lo contraggo tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ $\quad$ (moltiplico per $\frac{1}{\pi}$)



3. Lo traslo di $\frac{1}{2}$ verso l'alto $\quad$ (aggiungo $\frac{1}{2}$)

- ATTENZIONE : CODOMINIO $\neq$ IMMAGINE !

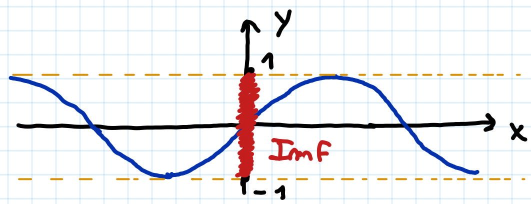
f : Dominio $\longrightarrow$ Codominio

Insieme immagine : $\mathrm{Im}f = f(\text{Dominio}) = \{ f(x) \mid x \in \text{Dominio} \}$
$\subseteq$ Codominio

Tipicamente abbiamo $f : \underset{\text{DOMINIO}}{\mathbb{R}} \to \underset{\text{CODOMINIO}}{\mathbb{R}}$ oppure $f : \underset{\text{DOMINIO}}{D} \longrightarrow \underset{\text{CODOMINIO}}{\mathbb{R}}$

Esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$

$\mathrm{Im}f = \{ \sin(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = [-1, 1]$



Il CODOMINIO è $\mathbb{R}$, l' INSIEME IMMAGINE è $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

Recap : f si dice SURGETTIVA se $\mathrm{Im}f$ = Codominio (f)

OSS. Quindi la proprietà "ESSERE SURGETTIVA" dipende fortemente da questa differenza : ad esempio per $f(x) = \sin(x)$,

se consideriamo
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora f NON è surgettiva
  $\mathrm{Im}f = [-1, 1] \subsetneq \mathbb{R}$
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, allora f è SURGETTIVA.

Solitamente, con "funzione reale" si intende una funzione il cui CODOMINIO è $\mathbb{R}$. In questo caso la funzione è surgettiva se assume tutti i valori reali (ossia se la sua IMMAGINE è tutto $\mathbb{R}$).

Domanda 8 La serie $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$

A) diverge positivamente
B) converge ad un valore maggiore di 1
C) converge ma non converge assolutamente
D) converge ad un valore minore di 1

Soluzione

Confronto con l'integrale di e^{-x}

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1 \longrightarrow \text{quindi } \sum_{n\geq 0} e^{-n} \text{ converge}$$

$$\sum_{n\geq 0} e^{-n} = e^0 + \sum_{n\geq 1} e^{-n} = 1 + \underbrace{\sum_{n\geq 1} e^{-n}}_{>0}$$

quindi converge a un valore maggiore di 1.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

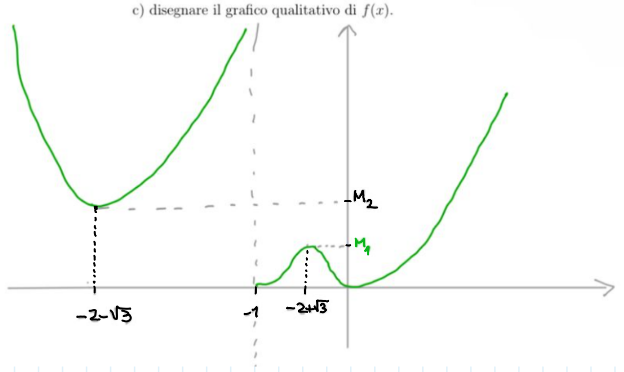
$$f(x) = x^2 e^{\frac{x-3}{x+1}}.$$

d) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare del parametro reale k.

Soluzione

Nei punti a), b) e c), l'esercizio richiede di studiare la funzione e di tracciarne il grafico. Supponiamo di averlo già fatto.

c) disegnare il grafico qualitativo di $f(x)$.



← Soluzione data (punti a), b), c)).

$M_1 = f(-2+\sqrt{3})$
$M_2 = f(-2-\sqrt{3})$

Risolviamo il punto d)

$$f(x) = K \qquad \cancel{x^2 e^{\frac{x-3}{x+1}} = K}$$

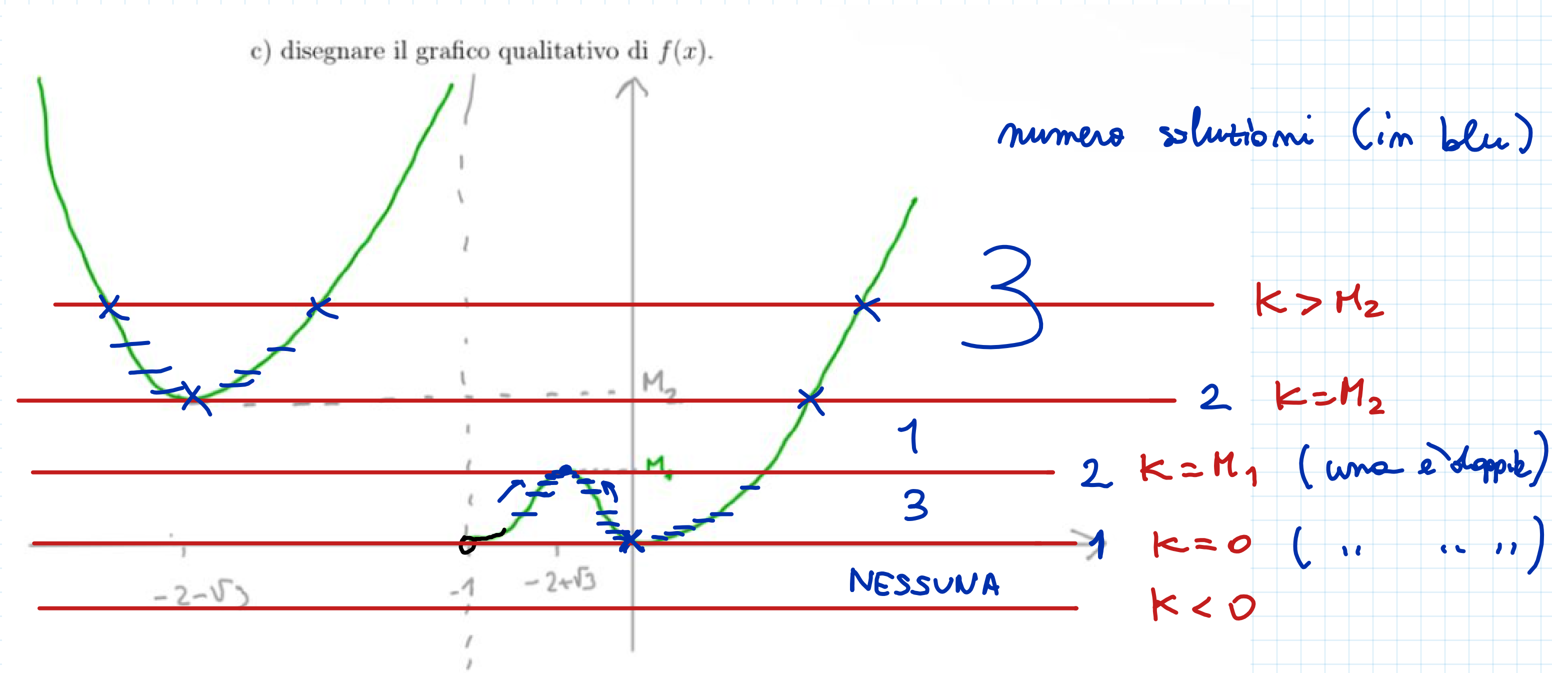
algebricamente può essere molto difficile!

MA abbiamo il grafico...

Graficamente significa trovare i punti di intersezione tra i grafici delle funzioni

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = K \end{cases}$$

eq. di una retta orizzontale



Per $K<0$ non ci sono punti di intersezione

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} \underbrace{e^{\frac{x-3}{x+1}}}_{>0} \geq 0$$

$K = 0$: c'è una sola soluzione. $= 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$

soluz. "DOPPIA"

Dopo aver verificato (a mano) che $M_1 < M_2$, dal grafico troviamo la risposta per $K > 0$ (come fatto nell'immagine).

↳ può essere giustificato algebricamente attraverso argomenti di monotonia (ad esempio per $\underline{x>0}$ f è strettam. crescente ⇝ $\underline{\text{una sola soluzione}}$), ma in questo caso non è richiesto.

Esercizio Stabilire il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \underline{\cos(n\pi)}\, \frac{\log(n)}{2\sqrt{n}}$.

Soluzione

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & , n \text{ PARI} \\ -1 & , n \text{ DISPARI} \end{cases} = (-1)^n$$

È ricorrente... Ricordatelo!

Quindi la serie è $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \underbrace{(-1)^n \frac{\log n}{2\sqrt{n}}}_{a_n}$.

- Assoluta convergenza

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| = \sum_{n\geq 1} \frac{|\log n|}{2\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{2\sqrt{n}} \overset{\log(1)=0}{=} \sum_{n\geq 2} \frac{\log n}{2\sqrt{n}} \geq$$

$n \geq 2$
$\log n \geq \log 2$
($\log$ è crescente)

$$\geq \sum_{n\geq 2} \frac{\log 2}{2\sqrt{n}} = \frac{\log 2}{2} \sum_{n\geq 2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\frac{1}{n^{1/2}}} = +\infty$$

Oppure:

$$\int_M^{+\infty} \frac{\log x}{2\sqrt{x}}\, dx = \int_{\sqrt{M}}^{+\infty} \log(t^2)\, dt = 2\int_{\sqrt{M}}^{+\infty} \log t\, dt = +\infty$$

$M \geq 2$

$t = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

Quindi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ NON è assol. conv.; è convergente?

Scriviamola come $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n b_n$, ossia $b_n = \dfrac{\log n}{2\sqrt{n}}$.

Questa forma ci fa istintivamente pensare al:

CRITERIO DI LEIBNIZ:

- $b_n \geq 0$ $\left(\log n \geq 0 \ , \ 2\sqrt{n} > 0 \quad \text{per} \quad n \geq 1 \right)$
- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{2\sqrt{n}} = 0$

  (log è un ordine di infinito minore di x^α)
- b_n decrescente (DEFINITIVAMENTE)

  cioè da un certo punto in poi...

Come lo vediamo?

Consideriamo $f(x) = \dfrac{\log x}{2\sqrt{x}}$ e vediamo se $\underbrace{\text{per } x > \text{ di un certo } M}$ f è decrescente.

f è derivabile in $(0, +\infty)$, e si ha:

$$f'(x) = \frac{(\log x)' \, 2\sqrt{x} - \log x \, (2\sqrt{x})'}{\underbrace{(2\sqrt{x})^2}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{2} x} \Big(\cancel{2} \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{1/\sqrt{x}} - \cancel{2} \log x \, \frac{1}{\sqrt{x}} \Big) =$$

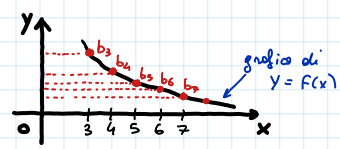
$$= \frac{1}{\underbrace{2x\sqrt{x}}_{>0}} \left(1 - \log x \right).$$

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \log x > 0 \iff 0 < x < e$$

Quindi, per $x > e$, si ha $f'(x) < 0$, ossia f è decrescente.

definitivamente

Quindi, per $n \geq 3$, b_n è descrescente. $(b_n = f(n))$



Poiché valgono le ipotesi del CRITERIO DI LEIBNIZ, si ha che la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ è CONVERGENTE.

Esercizio Calcolare la derivata di: $f(x) = (\sin(x))^{\sin(x)}$

Soluzione

Solita tecnica: $(a(x))^{b(x)} = e^{b(x)\log(a(x))}$.

$$f(x) = e^{\underbrace{\sin x \cdot \log(\sin x)}_{g(x)}} = e^{g(x)}.$$

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sin x)' \log(\sin x) + \sin x \cdot (\log(\sin x))' \\ &= \cos x \cdot \log(\sin x) + \cancel{\sin x} \frac{1}{\cancel{\sin x}} (\sin x)' \\ &= \cos x \cdot \log(\sin x) + \cos x \\ &= \cos x \,(1 + \log(\sin x)). \end{aligned}$$

$$f'(x) = \underbrace{e^{g(x)}} \cdot \cos x \,(1 + \log(\sin x)) =$$

$$= (\sin x)^{\sin x} \cos x \,(1 + \log(\sin x)).$$

Domanda Come trattare espressioni del tipo $\sin(\arctan(x))$?

Ricordare che ci sono delle formule che esprimono $\sin(x)$ e $\cos(x)$ in termini di di $\tan(x)$. Si ricavano sempre da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Infatti, dividendo per $\cos^2 t$: $\tan^2 t + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

da cui
$$\begin{cases} \cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t} \\ \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \dfrac{1}{1+\tan^2 t} = \dfrac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t} \end{cases}$$

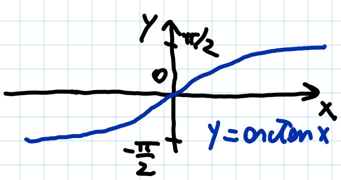
Quindi $\sin t = \pm \dfrac{|\tan t|}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ $\quad$ $+$ quando $\sin t \geq 0$, cioè $2k\pi \leq t \leq \pi + 2k\pi$

$-$ quando $\sin t < 0$, cioè $\pi + 2k\pi < t < 2\pi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

Da cui:

$$\sin(\arctan x) = \pm \frac{|\tan(\arctan(x))|}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} = \pm \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$

$+$ quando $\arctan(x) \geq 0 \iff x \geq 0 \iff |x| = x$

$-$ quando $\arctan(x) < 0 \iff x < 0 \iff |x| = -x$

Posso ricavarla dalle formule parametriche?

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{con} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

Sì! Posto $y = \frac{x}{2}$, si ha:

$$\cos(2y) = \frac{1-\tan^2(y)}{1+\tan^2(y)} \quad \text{ma anche} \quad \cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y)$$
$$= 1 - 2\sin^2(y)$$

da cui $\cancel{2}\sin^2 y = 1 - \dfrac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y} = \dfrac{\cancel{2}\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$

ossia la formula precedente: $\sin y = \pm \dfrac{|\tan y|}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$.

Esercizio Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n^\alpha + 1}$ converge.

Soluzione

Chiamiamo $a_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n^\alpha + 1}$

Sappiamo che se $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, allora deve valere $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$\alpha = 0$: $a_n = \dfrac{\sin(1)}{2}$ è costante $\neq 0$ $\left(\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0\right)$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n = \frac{\sin(1)}{2} \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty \qquad \text{DIVERGE}$$

$\alpha < 0$: $A = -\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^A} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \overbrace{\frac{\sin(n^{-\alpha})}{\underbrace{n^\alpha}_{\to 0}+1}}^{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{n^\alpha}_{\to 0}+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sin(n^A)}_{\text{NON ESISTE !}} \qquad \neq 0$$

Quindi per $\alpha \leq 0$ la serie NON CONVERGE.

$\alpha > 0$: $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

Per $n \to +\infty$ si ha $n^\alpha + 1 \sim n^\alpha$, da cui:

$\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n^\alpha+1} \text{ si comporta come } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Per confronto con la serie armonica generalizzata, si ha convergenza se e solo se $2\alpha > 1$, ossia $\alpha > \frac{1}{2}$.

In conclusione, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n^\alpha + 1}$ converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.